

УДК 519.65

doi:10.21685/2072-3040-2021-4-7

Применение полиномов Бернштейна к подавлению эффекта Гиббса (обзор литературы)

И. В. Бойков¹, Г. Ю. Салимов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹boikov@pnzgu.ru, ²salimovgorik@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Несмотря на то, что эффект (феномен) Гиббса был обнаружен почти 170 лет назад, поток работ, посвященных его исследованию и построению методов его подавления, не ослабевает до последнего времени. Это связано с тем, что эффект Гиббса оказывает негативное влияние при исследовании многих волновых процессов в гидродинамике, электродинамике, технике сверхвысоких частот, в вычислительной математике. Поэтому построение новых методов подавления эффекта Гиббса является актуальной задачей. Кроме того, предложено несколько вычислительных схем решения проблемы Гиббса в одной частной постановке. *Материалы и методы.* При построении вычислительных схем использовались методы теории приближения. В частности, использовались свойства полиномов Бернштейна при аппроксимации целых функций. *Результаты.* Представлен обзор работ, посвященных исследованию эффекта Гиббса и методам построения фильтров, подавляющих этот эффект. Обзор включает: историческую справку об исследовании эффекта Гиббса; различные методы подавления эффекта Гиббса; методы построения фильтров; описания проявления эффекта Гиббса в технике. *Выводы.* Продемонстрирована возможность применения полиномов Бернштейна к решению проблемы Гиббса в случае аналитических непериодических функций, заданных значениями в равноотстоящих узлах. Эти результаты могут быть использованы при решении задачи подавления эффекта Гиббса в других постановках.

Ключевые слова: эффект Гиббса, фильтры, полином Бернштейна

Для цитирования: Бойков И. В., Салимов Г. Ю. Применение полиномов Бернштейна к подавлению эффекта Гиббса (обзор литературы) // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 88–105. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-7

Application of Bernstein polynomials to suppress the Gibbs effect (literature review)

I.V. Boykov¹, G.Yu. Salimov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹boikov@pnzgu.ru, ²salimovgorik@mail.ru

Abstract. *Background.* Despite Gibbs effect (phenomenon) was discovered almost 170 years ago, the amount of works devoted to its research and the construction of methods of its suppression has not weakened until recently. This is due to the fact that the Gibbs effect has a negative impact on the study of many wave processes in hydrodynamics, electrodynamics, microwave technology, and computational mathematics. Therefore, the construction of new methods for suppressing the Gibbs effect is an issue of the day. In addition, several computational schemes for solving the Gibbs problem in one particular

formulation are proposed. *Materials and methods.* Methods of approximation theory were used in the construction of computational schemes. In particular, the properties of Bernstein polynomials were used in the approximation of integer functions. *Results.* The review of works devoted to the study of the Gibbs effect and methods of constructing filters that suppress this effect is presented. The review includes: historical background on the study of the Gibbs effect; various methods of suppressing the Gibbs effect; methods of building filters; descriptions of the manifestation of the Gibbs effect in technology. *Conclusions.* The possibility of applying Bernstein polynomials to the solution of the Gibbs problem in the case of analytic nonperiodic functions given by values in equally spaced nodes is demonstrated. These results can be used in solving the problem of suppressing the Gibbs effect in other formulations.

Keywords: Gibbs effect, filters, Bernstein polynomial

For citation: Boykov I.V., Salimov G.Yu. Application of Bernstein polynomials to suppress the Gibbs effect (literature review). *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):88–105. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-4-7

Введение

Метод разложения функций в ряды по тригонометрической системе функций, впервые с успехом примененный Ж. Фурье при решении задач теплопроводности и носящий его имя, в настоящее время используется практически во всех разделах математики, физики и технологий, особенно в областях, связанных с колебаниями и волнами.

Особенное впечатление на современников Фурье оказала сходимость рядов Фурье к функциям, имеющим конечное число разрывов с ограниченной амплитудой.

Замечание. Следует отметить, что еще Эйлер построил разложение разрывной функции в тригонометрический ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \frac{1}{2}(\pi - t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Позднее оказалось, что в метрике пространства $C[-\pi, \pi]$ с нормой $\|x(t)\| = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |x(t)|$ сходимость нарушается. Это отчетливо показано в книге [1] на примере функции

$$f(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{при } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

и продолженной периодически на числовую ось.

Обозначим через $S_n(t)$ n -ю частичную сумму ряда Фурье функции $f(t)$, а через $S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}(t)$.

Нетрудно видеть, что

$$S_{2n+1}(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}.$$

В работе [1] показано, что при $t > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} S_{2n+1}(t) = 0$, но $\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}(t) = 1$, и, более того, можно выбрать последовательности t_k , n_k , $t_k \rightarrow 0$, $n_k \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$, такие, что может быть достигнуто любое значение S , расположенное между $-1,18$ и $+1,18$, т.е.

$$\lim_{2n_k+1 \rightarrow \infty} S_{2n_k+1}(t_k) = S.$$

Таким образом, в окрестности точки разрыва создается «выброс», значения которого могут колебаться от $-1,18$ до $+1,18$ амплитуды исходного сигнала.

Это явление называется эффектом (феноменом) Гиббса и оказывает негативное влияние при исследовании и реализации многих задач в физике, технологиях, особенно в задачах передачи информации, радио и телевидении, в задачах вычислительной математики.

Эффект Гиббса впервые был обнаружен Генри Уилбрехамом в 1848 г. [2]. Работа Уилбрехама была не замечена, и только в 1925 г. его приоритет был восстановлен [3]. В 1898 г. Альберт Майклсон и Самаюэль Стреттон [4] наблюдали эффект Гиббса на механическом калькуляторе, построенном ими для вычисления частичных сумм ряда Фурье волновых функций. В работе [4] были представлены рисунки, демонстрирующие восстановление функций по их коэффициентам Фурье. На одном из рисунков наблюдались осцилляции, соответствующие эффекту Гиббса. Однако в статье [4] отсутствуют комментарии по этому поводу. Как пишет Д. Готлиб [5, с. 647)], Ланцош [6, с. 51] утверждает, что Майклсон не смог восстановить форму ударной волны по коэффициентам Фурье и обратился с этой проблемой к своему другу Д. У. Гиббсу. Готлиб [5] пишет, что не найдены подтверждения этого сообщения Ланцоша, и приводит переписку Майклсона с редактором журнала Nature, которая ставит под сомнение утверждение Ланцоша. Вскоре после этих событий вышли из печати две статьи Джозайа Уиллорда Гиббса [7, 8], в которых он объяснил наблюдаемый феномен. Феномен был назван именем Гиббса в 1906 г. Бохнером [9], который обобщил результаты Гиббса и дал строгое математическое доказательство.

В 20-е гг. прошлого столетия эффект Гиббса был исследован при разложении функций по другим базисным функциям. Разложения по функциям Бесселя и Шлемилха исследовались Вилтоном [10, 11] и Куком [12, 13]. Г. Вейль [14] исследовал феномен Гиббса при разложении по сферическим функциям. Эта работа актуальна и в настоящее время в связи с исследованиями физики атмосферы.

Впоследствии эффект Гиббса был исследован при разложении функций в ряды Фурье по классическим ортогональным многочленам; при аппроксимации функций сплайнами [15], вейвлетами и фраймлетами [16–21]. В работе [22] исследован феномен Гиббса в случае двумерных дробных рядов Фурье.

Анализируя коэффициенты Фурье, затруднительно определить точки разрыва исследуемой функции, но это возможно при применении аппарата вейвлетов и фраймлетов [23–26]. Кроме того, вейвлеты и фрамлеты находят применение при обработке сигналов и в вычислительной математике [23–26].

Подробный исторический обзор работ, посвященных феномену Гиббса, дан в [27]. В этой работе феномен Гиббса рассматривается с точки зрения исследования высокочастотных осцилляций в окрестности точек разрыва функций и их амплитуд.

В работе [5] проблема Гиббса трактуется как задача восстановления функции по ее коэффициентам Фурье. Необходимость в подавлении феномена Гиббса возникает при решении многих задач физики и технологий: при исследовании ударных волн, при аэрокосмической съемке поверхности Земли, при сжатии информации. В связи с этим в статье [5] сформулированы следующие задачи:

Проблема 1. Дан $(2N+1)$ коэффициент Фурье $\hat{f}_k$, $-N \leq k \leq N$, аналитической, но не периодической функции $f(t)$, $-1 \leq t \leq 1$. Требуется точно восстановить функцию $f(t)$.

Проблема 2. Дан $(2N+1)$ коэффициент Фурье $\hat{f}_k$, $-N \leq k \leq N$, кусочно-аналитической функции $f(t)$, $-1 \leq t \leq 1$. Требуется точно восстановить функцию $f(t)$ в любом интервале $(a;b) \subset [-1;1]$, не содержащем точек разрыва.

Проблема 3. Дана кусочно-непрерывная функция $f(t)$, определенная на $[-1;1]$. Предположим, что даны первые k ($0 \leq k \leq N$) коэффициентов разложения функции $f(t)$ по полиномам Гегенбауэра $G_k^\mu(t)$ с весовой функцией $(1-t^\alpha)^{\mu-\frac{1}{2}}$ при произвольном $\mu > 0$. Требуется восстановить функцию $f(t)$ с экспоненциальной точностью (под экспоненциальной точностью понимается скорость сходимости порядка $e^{-\alpha N}$ при некотором α).

Проблема 4. Пусть $f(t)$ – неизвестная, аналитическая и непериодическая функция в сегменте $[-1;1]$. Даны $f\left(\frac{k}{N}\right)$, $-N \leq k \leq N-1$, значения. Требуется восстановить функцию $f(t)$ с экспоненциальной точностью.

Проблема 5. Пусть $f(t)$ – неизвестная, кусочно-аналитическая функция на $[-1;1]$. Пусть даны значения $f\left(\frac{k}{N}\right)$, $-N \leq k \leq N-1$. Требуется восстановить функцию $f(t)$ с экспоненциальной точностью.

В настоящее время проблема преодоления («подавления») эффекта Гиббса является активно развивающимся направлением в вычислительной математике и в теории и технологиях передачи информации.

Отметим, что первая попытка подавления эффекта Гиббса принадлежит Фейеру. Он показал, что суммирование рядов по Чезаре дает равномерную сходимость к функции.

В статье представлен обзор работ, посвященных эффекту Гиббса. Продемонстрирована возможность применения полиномов Бернштейна к решению проблемы Гиббса в случае аналитических непериодических функций, заданных значениями в равноотстоящих узлах.

1. Фильтры

1.1. Построение фильтров

Как отмечено в [28, 29], одной из причин возникновения эффекта Гиббса является медленная скорость убывания модулей коэффициентов Фурье в разложении функций в ряд Фурье. Для решения этой проблемы используются фильтры.

Фильтром порядка q называется действительная четная функция $\sigma(t)$, определенная на числовой оси, имеющая производные $(q-1)$ -го порядка и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\sigma(t) = 0$ при $|t| > 1$;
- 2) $\sigma(0) = 1$ и $\sigma(\pm 1) = 0$;
- 3) $\sigma^{(m)}(0) = \sigma^{(m)}(\pm 1) = 0$ для всех $m = 1, 2, \dots, q-1$.

Функционирование фильтров определяется формулой

$$f_N^\sigma(t) = \sum_{k=-N}^N \sigma\left(\frac{|k|}{N}\right) \hat{f}_k \varphi_k(t),$$

где $\hat{f}_k$, $k = \overline{-N, N}$ – коэффициенты Фурье разложения функции f по базису $\{\varphi_k(t)\}$, $k = \overline{-N, N}$, $\sigma(t)$ – фильтр.

Из этой формулы видно, что фильтрация проводится за счет подавления высоких частот.

Приведем примеры нескольких фильтров:

– косинусоидальный фильтр:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi t)), & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1; \end{cases}$$

– фильтр Ланцоша:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t}, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Отметим, что важным является условие непрерывности фильтра. В работах [30, 31] показано, что в случае резкого подавления высоких частот сходимость не улучшается даже для гладких функций. Кроме того, в [30, 31] исследована точность аппроксимаций функций из $W^2([- \pi, \pi], M)$ с единственной точкой разрыва фильтрами $\sigma(t)$. Напомним, что через $W^r([a, b], M)$ обозначается класс функций $f(t)$, $t \in [a, b]$, определенных на сегменте $[a, b]$, имеющих на этом сегменте непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую неравенству $|f(t)| \leq M$.

Аналогичным образом строятся фильтры, основанные на других системах ортогональных функций. Наиболее распространенными являются филь-

тры, основанные на полиномах Чебышева первого рода $T_n(t)$, ортонормированных на сегменте $[-1;1]$ с весовой функцией $(1-t^2)^{-1/2}$.

В работе [32] отмечено, что хотя фильтрация может убрать проявление феномена Гиббса в точке разрыва функции, точность аппроксимации функции снижается в окрестности точки разрыва. Однако, если рассматриваемая функция является кусочно-аналитической, явление Гиббса может быть полностью устранено повторным разложением частной суммы Фурье исходной функции с использованием другого набора базисных функций.

В последнее время активно развиваются методы спектрального репроецирования для подавления эффекта Гиббса. Пионерскими здесь являются работы [30, 33].

Один из методов заключается в следующем [32]: пусть $f(t) \in L_2[-1;1]$ и функция $f(t)$ является аналитической на сегменте $[a;b] \subset [-1;1]$. Обозначим через $f_N(t)$ N -ую частичную сумму разложения функции $f(t)$ в ряд по базису $\{\psi_k(t)\}$:

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^N (f, \psi_k) \psi_k(t),$$

где (f, ψ_k) означает скалярное произведение.

Предположим также, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - f_N(t)\|_{C[-1;1]} = 0.$$

Сходимость ряда $\sum_{k=0}^N (f, \psi_k) \psi_k(t)$ может оказаться медленной, если $[a;b] \subset [-1;1]$ и в области $[-1;1] \setminus [a;b]$ имеются точки разрыва функции $f(t)$.

В случае, если представляет интерес восстановление функции $f(t)$ только в области $[a;b]$, то применим метод спектрального репроецирования. Метод заключается в следующем. Отобразим сегмент $[a;b]$ на $[-1;1]$: $x = -1 + 2\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$. Разложим полином $f_N(t)$ по базису $\psi_k(x)$, ортонормальному в сегменте $[a;b]$:

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^m \langle f_N, \psi_k \rangle \psi_k(x(t)). \quad (2)$$

Показано, что при ряде дополнительных условий данное разложение экспоненциально быстро сходится на сегменте $[a;b]$.

В работе [32] приведен пример репроецирования частичной суммы Фурье по тригонометрической системе в частичную сумму Фурье по полиномам Гегенбауэра.

В общем случае для применения метода репроецирования необходимо определить точки разрыва восстанавливаемой функции. Методам обнаружения точки разрыва посвящены работы [28, 29].

Для исследования фильтров удобно их представить в виде свертки. Воспользовавшись свойством 1 свертки, сумму $f_N^\sigma(t)$ можно представить в виде

$$f_N^\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \hat{f}_k \varphi_k(t),$$

следовательно,

$$f_N^\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где функция фильтра $S(t)$ представима формулой

$$S(t) = \sum_{k=-N}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 [5]. Пусть $f(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, – кусочно-гладкая функция, принадлежащая $W^r([0, 2\pi], M)$ с одной точкой разрыва ξ . Пусть $\sigma\left(\frac{k}{N}\right)$ – фильтр порядка r . Пусть τ – точка в $[0, 2\pi]$ и пусть $d(\tau) = \min_{k=-1, 0, 1} |\tau - \xi + 2k\pi|$. Пусть

$$f_N^\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt},$$

тогда

$$\left| f(t) - f_N^\sigma(t) \right| \leq CN^{1-r} d(t)^{1-r} K(f) + CN^{\frac{1}{2}-r} \|f^{(r)}\|_{L_2},$$

где

$$K(f) = \sum_{l=0}^{r-1} d(t)^l (f^{(l)}(\xi^+) - f^{(l)}(\xi^-)) \int_{-\infty}^{\infty} G_l^{(r-1)}(\tau) d\tau, \quad G_l(t) = \frac{\sigma(t) - 1}{t^{(l)}}.$$

Таким образом, в случае, если известны точки разрыва функции $f(t)$, можно предварительно оценить ожидаемую погрешность.

1.2. Эффект Гиббса в технических приложениях

При применении интерполяционных полиномов и отрезков рядов Фурье при передаче и восстановлении оптической информации возникает эффект Гиббса. Он проявляется на изображениях в виде ореолов (ложного оконтуривания) вокруг линий резких перепадов интенсивности, возникающих из-за недостатка информации о высоких частотах.

Для его подавления можно использовать методы, разработанные в теории аппроксимации.

Замечание. Наряду с эффектом Гиббса наиболее распространенными артефактами, связанными с искажением высокочастотной информации, являются алиасинг и размытие, причем подавление одного из артефактов приводит к усилению других. Для одновременного подавления всех трех артефактов применяются нелинейные методы [34, 35].

В настоящее время имеется большое число научных и технологических проблем, для решения которых требуются высококачественные изображения. Построение изображений с высоким разрешением требует привлечения аппаратных и математических методов. В данной работе ограничимся математическими методами, среди которых различают линейные и нелинейные. Для построения изображений с высокой разрешимостью широко используют методы интерполяции. В данном случае интерполяция заключается в следующем. Имеется ряд пикселей, в которых известно изображение. Будем их называть отмеченными. Для создания высококачественного изображения необходимо определить значения изображений в пикселях, расположенные между отмеченными пикселями. Таким образом, задача сводится к восстановлению функции изображений по отмеченным пикселям. Это задача теории аппроксимации, решение которой можно получить известными методами в случае, если известен класс функций, к которому принадлежит исследуемое изображение. Возможно применение линейных и нелинейных методов восстановления. Наиболее широко применяются методы интерполяции, онлайн-аппроксимации, приближение вейвлетами, отрезками рядов Фурье и отрезками рядов Котельникова.

Построение интерполяционных методов описывается в одномерном случае формулой

$$f(x) = \sum_{i=-N}^N F(i)\psi_i(x), \quad (1)$$

где $i = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$, – отмеченные пиксели; $\psi_i(x)$ – функция, равная единице на i -м отмеченном пикселе и нулю на остальных отмеченных пикселях, а в двумерном случае формулой

$$f(x, y) = \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^M F(i, j)\psi_{i,j}(x, y), \quad (2)$$

где $\{i, j\}, i = \overline{-N, N}, j = \overline{-M, M}$ – сетка отмеченных пикселей; $\psi_{i,j}(x, y)$ – функция, равная единице на отмеченном пикселе (i, j) и равная нулю на остальных отмеченных пикселях. Здесь $F(i)$ и $F(i, j)$ – значения интерполируемой функции на отмеченных пикселях.

По формулам (1) (в одномерном случае) и (2) (в двумерном случае) восстанавливаются значения функции $f(t)$ и $f(t_1, t_2)$ в неотмеченных пикселях.

Отметим, что если нужно усилить или ослабить сигнал в (i, j) -м пикселе, значение $\psi_{i,j}(i, j)$ можно взять больше или меньше единицы.

1.3. Применение методов суммирования расходящихся рядов к подавлению эффекта Гиббса

В ряде случаев для подавления эффекта Гиббса могут быть использованы методы суммирования расходящихся рядов. Впервые это продемонстрировал Фейер [36, 37].

Метод заключается в следующем.

Пусть 2π -периодическая функция $f(t)$, которая разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) \asymp \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Знак $\asymp$ означает формальное разложение, в котором левая часть не обязательно равна правой.

Обозначим через $S_n(t)$ n -ю частичную сумму ряда Фурье:

$$S_n(t) = \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Сумма Фейера вводится формулой

$$\sigma_n(t) = \frac{S_0(t) + S_1(t) + \dots + S_{n-1}(t)}{n}.$$

Помимо суммирования по Фейеру для подавления эффекта Гиббса можно использовать суммирование по Валле-Пуссену. Сумма Валле-Пуссена имеет вид

$$\tau_n(t) = \frac{S_n(t) + \dots + S_{2n-1}(t)}{n}.$$

Известна [37] связь между суммами Валле-Пуссена и Фейера: $\tau_n(t) = 2\sigma_{2n}(t) - \sigma_n(t)$.

Так как при использовании классического метода суммирования Валле-Пуссена требуется выполнение достаточно большого числа арифметических операций, то вычисления можно упростить, воспользовавшись укороченным алгоритмом

$$\tau_{n,m}(t) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n-m}^n S_k(t).$$

Вопросы сходимости сумм $\tau_{n,m}(t)$ к гладкой функции $f(t)$ исследовались в работах [38, 39].

Замечание. Для подавления эффекта Гиббса могут быть использованы различные методы суммирования расходящихся тригонометрических рядов.

2. Применение полиномов Бернштейна к подавлению эффекта Гиббса

Для подавления эффекта Гиббса могут быть также использованы полиномы Бернштейна.

Для решения упомянутой выше проблемы 4 в случае целых непериодических функций могут быть использованы полиномы Бернштейна.

Напомним, следуя [37], определение полиномов Бернштейна. Пусть $f(t) \in C[0;1]$. Полином Бернштейна имеет вид

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Известно следующее утверждение.

Теорема 2 [37, 40]. Если $f(x)$ есть целая функция, то ее полином Бернштейна сходится к ней на всей оси.

Эта теорема позволяет применить полином Бернштейна для восстановления аналитической непериодической функции, определенной на сегменте $[a;b]$, по ее значениям в сегменте $[c;d] \subset [a;b]$.

Полином Бернштейна может быть также использован при построении метода репроецирования частичной суммы Фурье.

Для описания метода ограничимся рассмотрением функции $f(t)$, $t \in [-\pi; \pi]$.

Пусть $f_N(t)$ – N -я частичная сумма ряда Фурье функции $f(t)$, располагая которой, требуется с максимальной точностью восстановить функцию $f(t)$.

Пусть функция $f(t)$ аналитическая на сегменте $[0;1]$ и имеет разрывы в области $[-\pi; \pi] \setminus [0;1]$.

Так как $f_N(t)$ является целой функцией, то $\lim_{m \rightarrow \infty} B_m(f_N)(t) = f_N(t)$ при $t \in [-\pi; \pi]$.

Сходимость $B_m(f_N)(t)$ к $f(t)$ на сегменте $[0;1]$ значительно превышает сходимость на всем сегменте $[-\pi; \pi]$.

Будем считать, что функция $f(t)$ гладкая на сегменте $[0;1]$ и имеет разрывы в области $[-\pi; \pi] \setminus [0;1]$.

Пусть функция $f(t)$ аппроксимируется на $[-\pi; \pi]$ N -й частичной суммой ряда Фурье по тригонометрической системе функций:

$$f_N(t) = \sum_{K=0}^{2N} (f, \psi_K) \psi_K(t).$$

$$\text{Аппроксимируем частичную сумму ряда Фурье } f_N(t) = \sum_{K=0}^{2N} (f, \psi_K) \psi_K(t)$$

на сегменте $[0;1]$ полиномом Бернштейна $B_m(f_N)(t)$. Отметим, что параметры m и N не связаны между собой. Вычисляя значения полинома Бернштейна на сегменте $[-\pi; \pi]$, восстанавливаем функцию $f(t)$ на этом сегменте.

Приведем примеры применения полиномов Бернштейна к решению 1, 2, 4, 5 проблем, сформулированных в [5] и приведенных выше.

Для решения этих проблем используются вычислительные схемы, построенные по единому принципу. При решении проблем 1 и 2 предполагается

ся, что на сегменте $[-\pi; \pi]$ задана аналитическая и непериодическая функция $f(t)$, определенная своими коэффициентами Фурье. При восстановлении функции $f(t)$ частичными суммами Фурье возникает эффект Гиббса в окрестностях точек $-\pi, \pi$.

Требуется, располагая значениями коэффициентов Фурье, восстановить функцию $f(t)$ с точностью ϵ в равномерной метрике $C[-\pi; \pi]$.

Пример 1. Дана функция

$$f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (3)$$

Функция разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4)$$

Требуется:

а) располагая первыми N коэффициентами ряда Фурье (4), восстановить функцию $f(t)$ на сегменте $[0; 2\pi]$;

б) располагая значениями $f\left(\frac{k}{N}\right)$, $k = \overline{0, N}$, восстановить функцию $f(t)$ на сегменте $[0; 2\pi]$.

Решение примеров. Случай (а):

1) составляется N -я частичная сумма ряда Фурье: $S_N(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin kt}{k}$;

2) определяются значения $S_N\left(\frac{k}{N}\right)$, $k = \overline{0, N}$;

3) строится полином Бернштейна на сегменте $[\pi; \pi + 1]$:

$$B_N(t) = \sum_{k=0}^m C_m^k S_N\left(\frac{k}{m} + \pi\right) (t - \pi)^k (1 - t + \pi)^{m-k};$$

4) определяется точность восстановления функции $f(t)$ на сегменте $[0; 2\pi]$.

Результаты решения при $N = 500$, $m = 10$ приведены в табл. 1 и на рис. 1.

Случай (б):

1) строится полином Бернштейна:

$$B_N(t) = \sum_{k=0}^m C_m^k f_N\left(\frac{k}{m}\right) t^k (1 - t)^{m-k};$$

2) определяется точность восстановления функции $f(t)$ на сегменте $[0; 2\pi]$.

Результаты решения примера 2 на сегменте $[0; 2\pi]$ при $N = 500$, $m = 20$ приведены в табл. 2 и на рис. 2.

Таблица 1

Восстановление функции полиномом Бернштейна,
построенным по N -й частной сумме ряда Фурье

Узел	Точное значение функции	Погрешность восстановления функции N -й частной суммой ряда Фурье	Погрешность восстановления функции полиномом Бернштейна
0,000000	1,570796	1,570796	0,010503
0,628319	1,256637	0,003078	0,005437
1,256637	0,942478	0,001376	0,000935
1,884956	0,628319	0,000727	0,001294
2,513274	0,314159	0,000325	0,001241
3,141593	0,000000	0,000000	0,000000
3,769911	0,314159	0,000325	0,000977
4,398230	0,628319	0,000727	0,000588
5,026548	0,942478	0,001376	0,001374
5,654867	1,256637	0,003078	0,003960
6,283185	1,570796	1,570796	0,005146

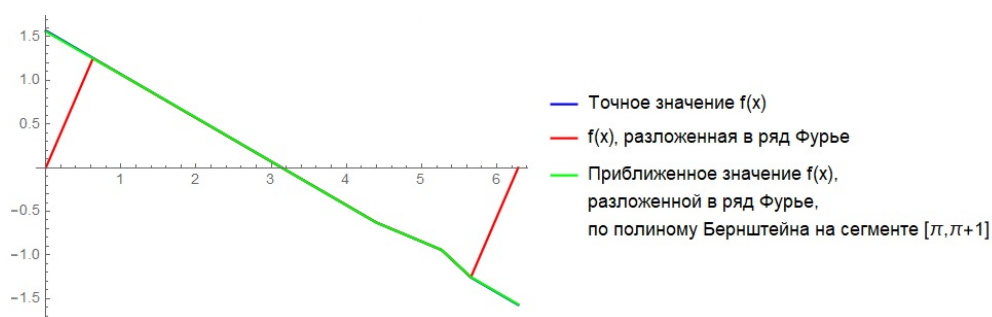
Рис. 1. Восстановление функции $f(t)$ полиномами Бернштейна

Таблица 2

Восстановление функции полиномом Бернштейна
по значениям функции на сегменте $[0; 2\pi]$

Узел	Точное значение функции	Погрешность восстановления функции полиномом Бернштейна
0,000000	1,570796	0,000000
0,628319	1,256637	0,000000
1,256637	0,942478	0,000000
1,884956	0,628319	0,000000
2,513274	0,314159	0,000000
3,141593	0,000000	0,000000
3,769911	-0,314159	0,000000
4,398230	-0,628319	0,000000
5,026548	-0,942478	0,000000
5,654867	-1,256637	0,000000
6,283185	-1,570796	0,000004

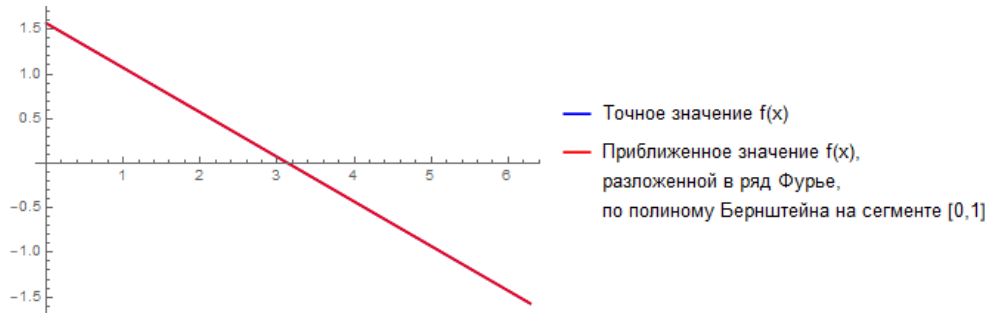


Рис. 2. Восстановление функции $f(t)$ на сегменте $[0; 2\pi]$

Пример 2. Дана функция

$$f(t) = \ln \left(2 \cos \frac{t}{2} \right), \quad -\pi < t < \pi. \quad (5)$$

Функция разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cos kt, \quad -\pi < t < \pi. \quad (6)$$

Требуется: располагая значениями $f\left(\frac{k}{N}\right)$, $k = \overline{0, N}$, восстановить функцию $f(t)$ на сегменте $(-\pi; \pi)$.

Решение примера 2:

$$1) \text{ строится полином Бернштейна: } B_N(t) = \sum_{k=0}^m C_m^k f_N \left(\frac{k}{m} \right) t^k (1-t)^{m-k};$$

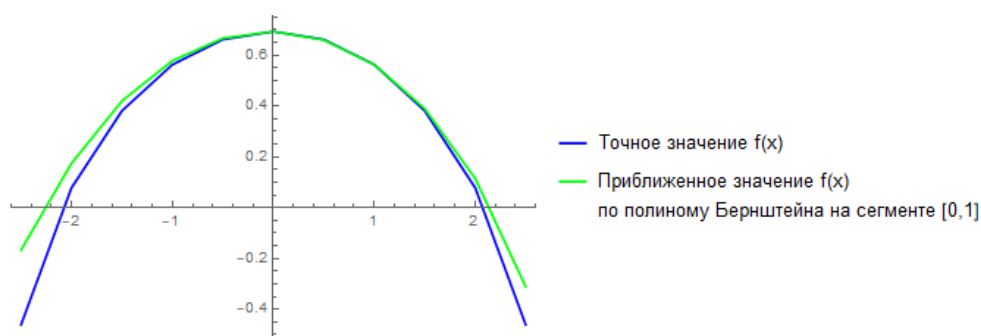
2) определяется точность восстановления функции $f(t)$ на сегменте $[0; 2\pi]$.

Результаты решения примера 2 на сегменте $[-2, 5; 2, 5]$ при $m = 20$ приведены в табл. 3 и на рис. 3.

Таблица 3

Восстановление функции $f(t)$ на сегменте $[-2, 5; 2, 5]$

Узел	Точное значение	Погрешность восстановления функции полиномом Бернштейна
-2,5	-0,461013	0,294210
-2,0	0,077521	0,096224
-1,5	0,380747	0,038930
-1,0	0,562563	0,015511
-0,5	0,661566	0,004928
0,00	0,693147	0,000000
0,50	0,661566	0,001667
1,00	0,562563	0,000000
1,50	0,380747	0,008377
2,00	0,077521	0,037087
2,50	-0,461013	0,149806

Рис. 3. Восстановление функции $f(t)$ на сегменте $[-2,5;2,5]$

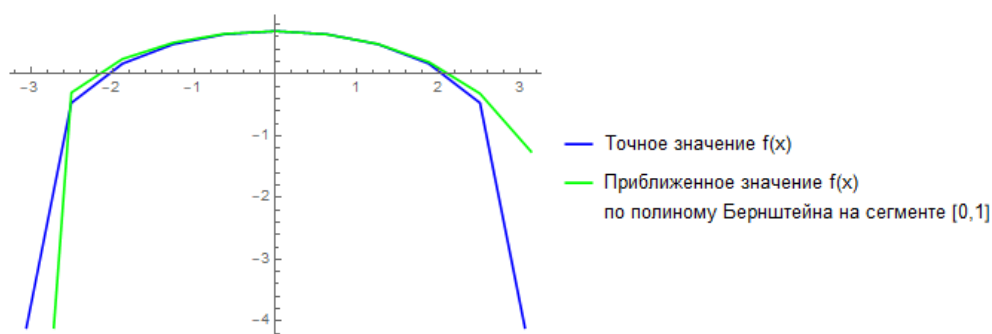
Рассмотрим восстановление на сегменте $(-\pi; \pi)$, учитывая, что в точках $-\pi$ и π происходит разрыв второго рода.

Результаты восстановления примера 2 на сегменте $[-\pi + 0,01; \pi - 0,01]$ при $m = 20$ приведены в табл. 4 и на рис. 4.

Таблица 4

Восстановление функции $f(t)$ на сегменте $[-\pi + 0,01; \pi - 0,01]$

Узел	Точное значение	Погрешность восстановления функции полиномом Бернштейна
-3,131593	-4,605174	6,765060
-2,505274	-0,468984	0,166387
-1,878956	0,165870	0,076555
-1,252637	0,482662	0,024945
-0,626319	0,643290	0,006901
0,000000	0,693147	0,000000
0,626319	0,643290	0,001617
1,252637	0,482662	0,002947
1,878956	0,165870	0,026565
2,505274	-0,468984	0,152196
3,131593	-4,605174	3,348839

Рис. 4. Восстановление функции $f(t)$ на сегменте $[-\pi + 0,01; \pi - 0,01]$

Список литературы

1. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1950. 458 с.

2. Willbraham H. Cambridge and Dublin Math // Journ. 1848. Vol. 3. P. 198–201.
3. Carslaw H. A historical note on Gibbs' phenomenon in Fourier's series and integrals // Bull. Amer. Math. Soc. 1925. Vol. 31. P. 420–424.
4. Michelson A., Stratton S. A new harmonic analyser // Philos. Mag. 1898. Vol. 45. P. 85–91.
5. Gottlieb D. Shu C. W. The Gibbs phenomenon and its resolution // SIAM Review. 1997. Vol. 39. P. 644–668.
6. Lanczos C. Discourse on Fourier Series, Hafner Publishing Company. New York, 1966.
7. Gibbs J. W. Fourier's Series. // Nature. 1898. Vol. 59, № 1522. P. 200.
8. Gibbs J. W. Fourier's Series // Nature. 1899. Vol. 59, № 1539. P. 606.
9. Bocher M. Introduction to the theory of Fourier's series // Ann. Math. 1906. Vol. 7. P. 81–152.
10. Wilton J. The Gibbs phenomenon in series of Schlömilch type // Messenger of Math. 1926. Vol. 56. P. 175–181.
11. Wilton J. The Gibbs phenomenon in Fourier-Bessel series // J. Reine Angew. Math. 1928. Vol. 159. P. 144–153.
12. Cook R. Gibbs's phenomenon in Fourier-Bessel series and integrals // Proc. London Math. Soc. 1928. Vol. 27. P. 171–192.
13. Cook R. Gibbs's phenomenon in Schlömilch series // J. London Math. Soc. 1928. Vol. 4. P. 18–21.
14. Weyl H. Die Gibbs'sche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Gesamtheite Abhandlungen. Berlin : Springer-Verlag, 1968. P. 305–320.
15. Richards F. B. A Gibbs phenomenon for spline functions // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 66. P. 334–351.
16. Shim H. T. A summability for Meyer wavelets // J. Appl. Math. Comput. 2002. Vol. 9. P. 657–666.
17. Shen X. On Gibbs phenomenon in wavelet expansions // J. Math. Study. 2002. Vol. 35. P. 343–357.
18. Shen X. Gibbs Phenomenon for Orthogonal Wavelets with Compact Support. In Advances in the Gibbs Phenomenon // Sampling Publishing / Jerri J. (ed.). Germany, Potsdam, 2011. P. 337–369.
19. Han B. Gibbs Phenomenon of Framelet Expansions and Quasi-projection Approximation // J. Fourier Anal. Appl. 2018. Vol. 25 (40). doi:10.1007/s00041-019-09687-9
20. Mohammad M., Lin E. B. Gibbs phenomenon in tight framelet expansions // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2018. Vol. 55. P. 84–92.
21. Gribonval R., Nielsen M. On approximation with spline generated framelets // Constr. Approx. 2004. Vol. 20. P. 207–232.
22. Ding Meiyu, Zhu Hongqing. Two-Dimensional gibbs phenomenon for fractional fourier series and its resolution // AICI'12: Proceedings of the 4th international conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence. 2012. P. 530–538. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33478-8_6
23. Li B., Chen X. Wavelet-based numerical analysis: A review and classification // Finite Elem. Anal. Des. 2014. Vol. 81. P. 14–31.
24. Barg A., Glazyrin A., Okoudjou K. A., Yu W. Finite two-distance tight frames // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 475. P. 163–175.
25. Ganiou A., Atindehou D., Kouagou Y. B., Okoudjou K. A. On the frame set for the 2-spline // arXiv 2018, arXiv:1806.05614.
26. Hussein R., Shaban K., El-Hag H. Energy conservation-based thresholding for effective wavelet denoising of partial discharge signals // Sci. Meas. Technol. IET. 2016. Vol. 10. P. 813–822.
27. Hewitt E. and Hewitt R. The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis // Hist. Exact Sci. 1979. Vol. 21. P. 129–160.

28. Gelb A. and Tadmor E. Detection of edges in spectral data // *Applied Computational Harmonic Analysis*. 1999. Vol. 7. P. 101–135.
29. Gelb A. and Tadmor E. Detection of edges in spectral data II. Nonlinear Enhancement // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2000. Vol. 38 (4). P. 1389–1408.
30. Gottlieb D., Shu C. W., Solomonoff A., Vandeve H. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1992. Vol. 43. P. 81–98.
31. Vandeve H. Family of spectral filters for discontinuous problems // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1991. Vol. 48. P. 159–192.
32. Gelb A., Gottlieb S. The resolution of the Gibbs phenomenon for Fourier spectral methods. URL: <https://www.researchgate.net/publication/228711336>
33. Gottlieb D. and Shu C.W. General theory for the resolution of the Gibbs phenomenon, *Accademia Nazionale Dei Lincei* // *ATTI Dei Convegni Lincei*. 1998. Vol. 147. P. 39–48.
34. Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В. А.Сойфера. М. : Физматлит, 2001. 784с.
35. Hartley R., Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. 2 ed. OUP. Cambridge, 2003.
36. Fejer L. Untersuchunder uber Fouriersche Reihen // *Math. Ann.* 1904. Vol. 58. P. 501–569.
37. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
38. Дамен В. О наилучшем приближении и суммах Валле-Пуссена // *Математические заметки*. 1978. Т. 23, № 5. С. 671–684.
39. Баскаков В. А. О приближении классов функций $C(\xi)$ суммами Валле-Пуссена и линейными полиномиальными операторами // *Известия вузов. Математика*. 1984. № 5. С. 19–24.
40. Канторович Л. В. О сходимости полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного // *Известия Академии наук СССР. Серия физ.-мат.* 1931. С. 1103–1115.

References

1. Zommerfel'd A. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki = Partial differential equations of physics*. Moscow: Izd-vo inostr. lit-ry, 1950:458. (In Russ.)
2. Willbraham H. CambridgeandDublinMath. *Journ.* 1848;3:198–201.
3. Carslaw H. A historical note on Gibbs' phenomenon in Fourier's series and integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1925;31:420–424.
4. Michelson A., Stratton S. A new harmonic analyser. *Philos. Mag.* 1898;45:85–91.
5. Gottlieb D. Shu C. W. The Gibbs phenomenon and its resolution. *SIAM Review*. 1997;39:644–668.
6. Lanczos C. *Discourse on Fourier Series*, Hafner Publishing Company. New York, 1966.
7. Gibbs J. W. Fourier's Series. *Nature*. 1898;59(1522):200.
8. Gibbs J. W. Fourier's Series. *Nature*. 1899;59(1539):606.
9. Bocher M. Introduction to the theory of Fourier's series. *Ann. Math.* 1906;7:81–152.
10. Wilton J. The Gibbs phenomenon in series of Schlömlich type. *Messenger of Math.* 1926;56:175–181.
11. Wilton J. The Gibbs phenomenon in Fourier-Bessel series. *J. Reine Angew. Math.* 1928;159:144–153.
12. Cook R. Gibbs's phenomenon in Fourier-Bessel series and integrals. *Proc. London Math. Soc.* 1928;27:171–192.
13. Cook R. Gibbs's phenomenon in Schlömlich series. *J. London Math. Soc.* 1928;4:18–21.
14. Weyl H. *Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen, Gesammeete Abhandlungen*. Berlin: Springer-Verlag, 1968:305–320.

15. Richards F.B. A Gibbs phenomenon for spline functions. *J. Approx. Theory*. 1991;66: 334–351.
16. Shim H.T. A summability for Meyer wavelets. *J. Appl. Math. Comput.* 2002;9:657–666.
17. Shen X. On Gibbs phenomenon in wavelet expansions. *J. Math. Study*. 2002;35:343–357.
18. Shen X. Gibbs Phenomenon for Orthogonal Wavelets with Compact Support. In Advances in the Gibbs Phenomenon. *Sampling Publishing*. Germany, Potsdam, 2011:337–369.
19. Han B. Gibbs Phenomenon of Framelet Expansions and Quasi-projection Approximation. *J. Fourier Anal. Appl.* 2018;25(40). doi:10.1007/s00041-019-09687-9
20. Mohammad M., Lin E.B. Gibbs phenomenon in tight framelet expansions. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2018;55:84–92.
21. Gribonval R., Nielsen M. On approximation with spline generated framelets. *Constr. Approx.* 2004;20:207–232.
22. Ding Meiyu, Zhu Hongqing. Two-Dimensional gibbs phenomenon for fractional fourier series and its resolution. *AICI'12: Proceedings of the 4th international conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence*. 2012:530–538. Available at: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-33478-866>
23. Li B., Chen X. Wavelet-based numerical analysis: A review and classification. *Finite Elem. Anal. Des.* 2014;81:14–31.
24. Barg A., Glazyrin A., Okoudjou K.A., Yu W. Finite two-distance tight frames. *Linear Algebra Appl.* 2015;475:163–175.
25. Ganiou A., Atindehou D., Kouagou Y.B., Okoudjou K.A. On the frame set for the 2-spline. *arXiv 2018, arXiv:1806.05614*.
26. Hussein R., Shaban K., El-Hag H. Energy conservation-based thresholding for effective wavelet denoising of partial discharge signals. *Sci. Meas. Technol. IET*. 2016;10:813–822.
27. Hewitt E. and Hewitt R. The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis. *Hist. Exact Sci.* 1979;21:129–160.
28. Gelb A. and Tadmor E. Detection of edges in spectral data. *Applied Computational Harmonic Analysis*. 1999;7:101–135.
29. Gelb A. and Tadmor E. Detection of edges in spectral data II. Nonlinear Enhancement. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2000;38(4):1389–1408.
30. Gottlieb D., Shu C. W., Solomonoff A., Vandevein H. On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the Fourier partial sum of a non-periodic analytic function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1992;43:81–98.
31. Vandevein H. Family of spectral filters for discontinuous problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1991;48:159–192.
32. Gelb A., Gottlieb S. *The resolution of the Gibbs phenomenon for Fourier spectral methods*. Available at: <https://www.researchgate.net/publication/228711336>
33. Gottlieb D. and Shu C.W. General theory for the resolution of the Gibbs phenomenon, Accademia Nazionale Dei Lincey. *ATTI Dei Convegni Lincey*. 1998;147:39–48.
34. Soyfer V. A. (ed.). *Metody komp'yuternoy obrabotki izobrazheniy = Methods of computer image processing*. Moscow: Fizmatlit, 2001:784. (In Russ.)
35. Hartley R., Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. 2 ed. OUP. Cambridge, 2003.
36. Fejer L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Math. Ann.* 1904;58:501–569.
37. Natanson I.P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy = Constructive theory of functions*. Moscow; Leningrad: GITTL, 1949:688. (In Russ.)
38. Damen V. Best approximation and de la Vallée-Poussin sums. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 1978;23(5):671–684. (In Russ.)
39. Baskakov V.A. Approximation of classes of $C(\xi)$ functions with the help of Vallée-Poussin sums and linear polynomial operators. *Izvestiya vuzov. Matematika = University proceedings. Mathematics*. 1984;(5):19–24. (In Russ.)

40. Kantorovich L.V. On the convergence of polynomials S.N. Bernstein outside the mainstream. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya fiz.-mat. = Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Physical and mathematical series.* 1931:1103–1115. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Илья Владимирович Бойков

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Il'ya V. Boykov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head
of the sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Георгий Юрьевич Салимов

аспирант, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: salimovgorik@mail.ru

Georgiy Yu. Salimov

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 29.09.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 19.10.2021

Принята к публикации / Accepted 26.11.2021